

# Cours – Séquence n° 14 – COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

## I- ENSEMBLES FINIS

### Définitions

1. Un **ensemble fini**  $E$  est un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments.
2. Le nombre d'éléments de l'ensemble fini  $E$  est appelé le **cardinal** de  $E$  et est noté  $\text{Card}(E)$ .
3. **Dénombrer** l'ensemble fini  $E$ , c'est compter le nombre d'éléments qu'il contient, c'est-à-dire déterminer son cardinal.

### Exemples

1.  $E = \{a ; b ; c\}$  est un ensemble fini à 3 éléments.
2. Les lettres du mot MATHEMATIQUES sont prises dans un ensemble fini contenant 9 éléments :  $\{M ; A ; T ; H ; E ; I ; Q ; U ; S\}$ .
3. Les nombres 421 et 142 sont formés par des chiffres appartenant à l'ensemble fini à 3 éléments :  $\{1 ; 2 ; 4\}$ .
4. Les ensembles  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$  ne sont pas des ensembles finis car chacun contient une infinité d'éléments.

### Remarques

1. Pour lister un ensemble d'éléments isolés les uns des autres, on utilise des accolades.
2. L'ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'ensemble vide et se note  $\emptyset$ . On a  $\text{Card}(\emptyset) = 0$ .
3. Dans un ensemble, l'ordre n'intervient pas :  $\{a ; b\} = \{b ; a\}$ .
4. Dans un ensemble, il n'y a pas de répétition d'un élément :  $\{a ; a\} = \{a\}$ .

### Définitions

1. On appelle **partie d'un ensemble**  $E$  un ensemble  $F$  tel que tous les éléments de  $F$  appartiennent aussi à  $E$ . On dit aussi que  $F$  est un **sous-ensemble** de  $E$ . Dans ce cas, on dit que  $F$  **est inclus dans**  $E$  et on note  $F \subset E$ .
2. La **réunion de deux ensembles**  $A$  et  $B$  est l'ensemble des éléments appartenant à  $A$  ou à  $B$ , noté  $A \cup B$ .
3. L'**intersection de deux ensembles**  $A$  et  $B$  est l'ensemble des éléments appartenant à  $A$  et à  $B$ , noté  $A \cap B$ .

### Exemples

1. L'ensemble  $F = \{a ; b\}$  est inclus dans l'ensemble  $E = \{a ; b ; c\}$ .  $F$  est une partie de  $E$ .
2. Si  $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$  et  $B = \{2 ; 5 ; 6 ; 7\}$ , alors  $A \cup B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7\}$  et  $A \cap B = \{2 ; 5\}$ .

### Remarques

1. Deux ensembles  $A$  et  $B$  dont l'intersection est vide sont dits **disjoints** et on écrit  $A \cap B = \emptyset$ .
2. Une partie à 1 élément s'appelle un **singleton** et une partie à deux éléments s'appelle une **paire**.

### Propriété : principe additif

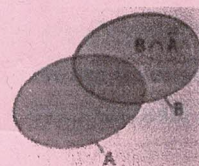
Si  $A$  et  $B$  sont deux parties disjointes d'un ensemble fini  $E$ , constituées respectivement de  $m$  et  $n$  éléments, alors le nombre d'éléments de la réunion  $A \cup B$  est la somme  $m + n$ .

### Remarque (notation et cas général)

Pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $E$  :  $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$ .

En effet,  $A \cup B$  est la réunion des ensembles disjoints  $A$  et  $B \cap \bar{A}$ .

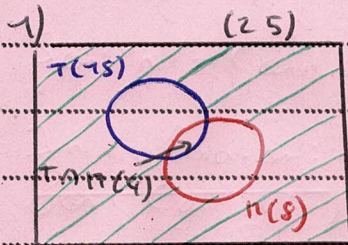
Ainsi,  $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B \cap \bar{A}) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$ .



**Exemple**

Dans une classe de 25 élèves, 15 élèves s'inscrivent à l'atelier théâtre, 8 élèves s'inscrivent à l'atelier musique et 4 élèves s'inscrivent à ces deux ateliers.

1. Schématiser la situation à l'aide d'un diagramme de Venn.
2. Déterminer le nombre d'élèves s'inscrivant dans au moins l'un des deux ateliers.
3. Combien d'élèves ne s'inscrivent ni à l'atelier théâtre ni à l'atelier musique ?



2)  $\text{Card}(T \cup n) = \text{Card}(T) + \text{Card}(n) - \text{Card}(T \cap n)$

$$\text{Card}(T \cup n) = 15 + 8 - 4$$

$$\text{Card}(T \cup n) = 19$$

Donc 19 élèves s'inscrivent dans au moins 1 atelier.

3)  $\text{Card}(\overline{T \cup n}) = 25 - \text{Card}(T \cup n)$

$$\text{Card}(\overline{T \cup n}) = 25 - 19$$

$$\text{Card}(\overline{T \cup n}) = 6 \text{ Donc 6 élèves ne s'inscrivent à aucun atelier}$$

**Définition**

Soit E et F deux ensembles.

Le **produit cartésien** des ensembles E et F, noté  $E \times F$ , est l'ensemble des couples  $(x; y)$  où x est un élément de E et y est un élément de F.

**Exemple**

Si  $E = \{a; b\}$  et  $F = \{1; 2; 3\}$ , alors  $E \times F = \{(a; 1); (a; 2); (a; 3); (b; 1); (b; 2); (b; 3)\}$ .

On peut utiliser un tableau à double entrée ou un arbre.

| E \ F | 1      | 2      | 3      |
|-------|--------|--------|--------|
| a     | (a; 1) | (a; 2) | (a; 3) |
| b     | (b; 1) | (b; 2) | (b; 3) |

Par contre,  $F \times E = \{(1; a); (1; b); (2; a); (2; b); (3; a); (3; b)\}$ .

**Propriété : principe multiplicatif**

Si E et F sont deux ensembles finis constitués respectivement de m et n éléments,

alors  $E \times F$  est un ensemble fini dont le nombre d'éléments est le produit mn.

**Remarque**

En effet, un tableau avec m lignes et n colonnes contient mn cases.

**Exemple**

On dispose d'un jeu de cartes habituel.

E est l'ensemble des valeurs des cartes :  $E = \{as; 2; 3; \dots; 9; 10; valet; dame; roi\}$ .

F est l'ensemble des couleurs des cartes :  $F = \{cœur; carreau; trèfle; pique\}$ .

Chaque carte du jeu est un élément du produit cartésien  $E \times F$ . Par exemple l'as de cœur est le couple  $(as; cœur)$ .

Le nombre de cartes de ce jeu est donc le nombre d'éléments de  $E \times F$ .

E a 13 éléments et F a 4 éléments donc  $E \times F$  a  $13 \times 4$  éléments c'est-à-dire il y a 52 cartes.

**Définition**

Soit  $E$  un ensemble et  $k$  un nombre entier naturel non nul.

1. On appelle **un  $k$ -uplet (ou une  $k$ -liste)** d'éléments de  $E$  une **liste ordonnée** de  $k$  éléments de  $E$ , distincts ou confondus.
2. **L'ensemble de tous les  $k$ -uplets de  $E$**  est l'ensemble  $E \times E \times \dots \times E$  ( $k$  fois), noté  $E^k$ .

**Remarques**

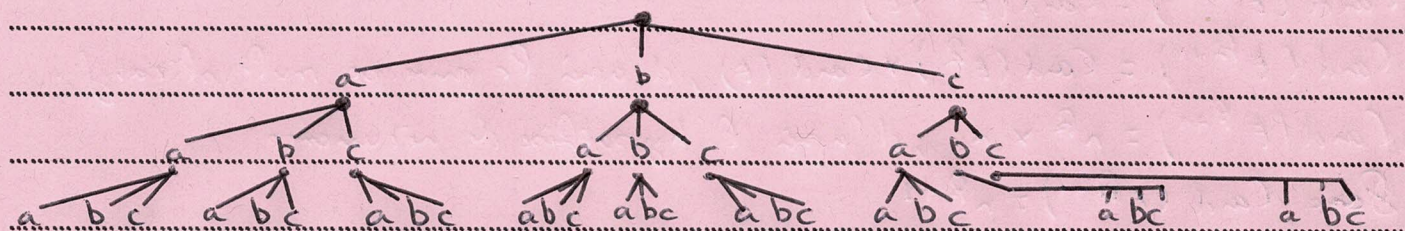
1. Un  $k$ -uplet s'écrit avec des parenthèses.
2. Un 2-uplet est un couple ; un 3-uplet s'appelle un triplet.
3. Dans un  $k$ -uplet, l'ordre a de l'importance :  $(x; y) \neq (y; x)$ .
4. Les éléments des  $k$ -uplets peuvent être identiques :  $(x; x)$ .

**Exemple**

Soit  $E = \{a; b; c\}$  un ensemble fini à 3 éléments.

$(a; b; c); (a; b; a); (b; a; c); (c; a; b)$  sont des triplets différents de  $E^3$ .

À l'aide d'un arbre, lister tous les triplets de  $E^3$ .



$$E^3 = \{(a; a; a); (a; a; b); (a; a; c); (a; b; a); (a; b; b); (a; b; c); (a; c; a); (a; c; b); (a; c; c); (b; a; a); (b; a; b); (b; a; c); (b; b; a); (b; b; b); (b; b; c); (b; c; a); (b; c; b); (b; c; c); (c; a; a); (c; a; b); (c; a; c); (c; b; a); (c; b; b); (c; b; c); (c; c; a); (c; c; b); (c; c; c)\}$$

Remarque :  $\text{Card}(E^3) = 27$

## II- NOMBRE D'ÉLÉMENTS DE $E^k$ ET NOMBRE DE PARTIES D'UN ENSEMBLE

### Propriété : nombre d'éléments de $E^k$

Si  $E$  est un ensemble fini à  $n$  éléments ( $n \in \mathbb{N}$ ) et  $k$  est un entier naturel non nul ( $k \in \mathbb{N}^*$ ), alors le nombre de  $k$ -uplets de  $E$  est  $n^k$ , c'est-à-dire  $\text{Card}(E^k) = n^k$ .

#### Démonstration

Soit  $n = \text{Card}(E)$ . Démontrons par récurrence que :  $\forall R \in \mathbb{N}^* \text{ Card}(E^R) = n^R$

Initialisation : Si  $R = 1$ , alors  $E^1 = E$  et  $\text{Card}(E) = n$ , Or  $n^1 = n$

Donc  $\text{Card}(E^1) = n^1$ . La propriété est vraie au rang  $R = 1$

Hérédité : Supposons qu'il existe  $R \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\text{Card}(E^R) = n^R$  et montrons que  $\text{Card}(E^{R+1}) = n^{R+1}$

$$\text{Card}(E^{R+1}) = \text{Card}(E^R \times E)$$

$$\text{Card}(E^{R+1}) = \text{Card}(E^R) \times \text{Card}(E), \text{ d'après le principe multiplicatif.}$$

$$\text{Card}(E^{R+1}) = n^R \times n, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence.}$$

$$\text{Donc } \text{Card}(E^{R+1}) = n^{R+1}$$

Donc la propriété est vraie au rang  $R+1$ , elle est héréditaire.

Conclusion : D'après l'anneau de récurrence,  
 $\forall R \in \mathbb{N}^* \text{ Card}(E^R) = n^R$

#### Exemple 1

Dans l'exemple page 3,  $E = \{a; b; c\}$ . On a listé 27 triplets possibles avec les éléments de  $E$ .

En effet, ici  $n = 3$  et  $k = 3$ , donc  $\text{Card}(E^3) = n^k = 3^3 = 27$

#### Exemple 2

$E$  est l'ensemble des lettres de l'alphabet français (sans tenir compte de l'accentuation).

Un mot de cinq lettres est une succession de cinq lettres de l'alphabet (les répétitions sont possibles).

1. Donner un exemple de 5-uplet d'éléments de  $E$ .
2. Combien de mots de cinq lettres, ayant un sens ou non, peut-on écrire à partir de l'alphabet ?

1)  $(a; n; b; i; e); (j; u; l; i; a); (m; a; i; t; i; s)$

2) On cherche le nombre de 5-uplets d'éléments de  $E$  : c'est  $n^k = 26^5$

Il y en a 11881376

**Définition**

Soit  $E$  un ensemble.

On appelle **l'ensemble des parties de  $E$**  l'ensemble formé de toutes les parties de  $E$ , c'est-à-dire de tous les sous-ensembles possibles de  $E$ . On le note  $\mathcal{P}(E)$ .

**Remarque**

L'ensemble vide  $\emptyset$  est une partie à 0 élément de tout ensemble.

**Exemple 1**

Soit  $E = \{a; b; c\}$  est un ensemble à trois éléments. Les parties de  $E$  sont les ensembles à :

- 0 élément :  $\emptyset$
- 1 élément :  $\{a\}, \{b\}, \{c\}$
- 2 éléments :  $\{a; b\}, \{a; c\}, \{b; c\}$
- 3 éléments :  $\{a; b; c\}$

Donc  $E$  a **8** parties et  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; \{a; b; c\}\}$

**Exemple 2**

L'ensemble vide  $E = \emptyset$  a **1** partie à **0** élément :  $\emptyset$  Donc  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$

**Propriété : nombre de parties d'un ensemble**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Un ensemble fini  $E$  à  $n$  éléments possède  $2^n$  parties, c'est-à-dire  $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ .

**Démonstration\***

Démonstration par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N} \text{ Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

Initialisation: Si  $n = 0$ , alors  $E = \emptyset$  et  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$ , donc  $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 1$

Or,  $2^0 = 1$  donc  $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^0$

Donc la propriété est vraie au rang  $n = 0$

Hérédité: Supposons que à un rang  $n \in \mathbb{N}$   $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$  et montrons que  $\text{Card}(\mathcal{P}(E')) = 2^{n+1}$  où  $E' = E \cup \{x\}$  tel que  $x \notin E$

Il y a deux familles de parties de  $E'$

\* celles qui sont formées des parties de  $E$ , il y en a  $2^n$  d'après l'hypothèse de

\* celles qui contiennent  $x$ , elles sont obtenues en adjoignant  $x$  à chaque partie de  $E$  (récurrence)  
il y en a aussi  $2^n$ , au total, il y en a  $2 \times 2^n = 2^{n+1}$  donc  $\text{Card}(\mathcal{P}(E')) = 2^{n+1}$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ , elle est héréditaire

Conclusion: D'après le principe de récurrence  $\forall n \in \mathbb{N} \text{ Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

**Exemple 1**

Dans l'exemple de la page précédente,  $E = \{a ; b ; c\}$ .  $n = 3$  et donc  $E$  possède  $2^3 = 8$  parties.

**Exemple 2**

Combien de mots différents de cinq lettres prises dans l'alphabet  $\{A ; B\}$  peut-on écrire ?

➤ 1<sup>ère</sup> méthode : avec le nombre de  $k$ -uplets d'un ensemble

Chaque mot de 5 lettres prises dans  $\{A ; B\}$  est un 5-uplet de  $\{A ; B\}$ .

Or, le nombre de 5-uplets d'un ensemble à deux éléments avec  $n = 2$  et  $k = 5$  est :  $n^k = 2^5 = 32$

➤ 2<sup>ème</sup> méthode : avec le nombre de parties d'un ensemble

Chaque mot de 5 lettres prises dans  $\{A ; B\}$  est un 5-uplet de  $\{A ; B\}$ .

On introduit un ensemble fini  $E = \{x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ; x_5\}$  et on va associer chaque mot à une partie de  $E$ .

On convient que la présence d'un  $A$  (resp.  $B$ ) en  $i$ -ème position dans le 5-uplet signifie la présence (resp. l'absence) de  $x_i$  dans la partie de  $E$  correspondante avec  $1 \leq i \leq 5$ .

Par exemple, le mot  $(A ; B ; B ; A ; B)$  correspond à la partie  $\{x_1 ; x_4\}$  de  $E$  ou encore la partie  $\{x_2 ; x_4 ; x_5\}$  correspond au mot  $(B ; A ; B ; A ; A)$ . Ainsi, chaque mot est modélisé par une partie de  $E$ .

Le nombre de mots différents de 5 lettres est donc le nombre de parties de  $E$  où  $n = 5$  : c'est  $2^n = 2^5 = 32$

**Exemple 3**

Un site possède dix produits à la vente. Le client peut mettre dans son panier au plus un article de chaque produit. Déterminer le nombre de paniers différents que le client peut réaliser.

➤ 1<sup>ère</sup> méthode : avec le nombre de parties d'un ensemble

L'ensemble des 10 produits est  $E = \{P_1 ; P_2 ; \dots ; P_{10}\}$ . Un panier est modélisé par une partie de  $E$ .

Le nombre de paniers différents que le client peut réaliser est donc le nombre de parties de  $E$  : c'est  $2^{10} = 1024$

➤ 2<sup>ème</sup> méthode : avec le nombre de  $k$ -uplets d'un ensemble

Réaliser un panier revient à se demander pour chaque produit si on le prend (1) ou si on ne le prend pas (0).

Par exemple, le panier modélisé par le 10-uplet  $(1 ; 0 ; 0 ; 1 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 0)$  représente la partie  $\{P_1 ; P_4 ; P_9\}$ .

Le nombre de paniers différents que le client peut réaliser est donc le nombre de 10-uplets que l'on peut fabriquer à partir de l'ensemble  $\{0 ; 1\}$ . Ici  $n = 10$  et  $k = 10$ , donc le nombre de paniers est :  $2^{10} = 1024$

**Remarque (lien entre parties d'un ensemble à  $n$  éléments et  $n$ -uplets de  $\{0 ; 1\})$** 

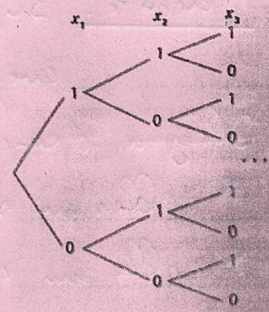
Soit  $E = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$  est un ensemble fini à  $n$  éléments où  $n \in \mathbb{N}$ .

À chaque partie de  $E$ , correspond un unique  $n$ -uplet de  $\{0 ; 1\}$ . En effet :

- si  $x_1$  appartient à la partie, alors on affecte 1 en 1<sup>ère</sup> position du  $n$ -uplet et 0 sinon ;
- si  $x_2$  appartient à la partie, alors on affecte 1 en 2<sup>ème</sup> position du  $n$ -uplet et 0 sinon ;
- et ainsi de suite jusqu'à  $x_n$  et la  $n$ ème position du  $n$ -uplet.

Par exemple :

- le  $n$ -uplet  $(1 ; 0 ; 1 ; 0 ; \dots ; 0)$  correspond à la partie  $\{x_1 ; x_3\}$  ;
- le  $n$ -uplet  $(0 ; 0 ; 0 ; \dots ; 0)$  correspond à la partie  $\emptyset$ ...



**Ainsi, il y a autant de parties de l'ensemble  $E$  que de  $n$ -uplet de l'ensemble  $\{0 ; 1\}$ , c'est-à-dire  $2^n$ .**